

Xâu con chung dài nhất

Giới hạn thời gian: 1.0s Giới hạn bộ nhớ: 65M

Cho hai chuỗi ký tự a và b .
Ta muốn tìm một chuỗi ký tự có thể thu được từ cả hai chuỗi bằng cách xóa đi một số (có thể là 0) ký tự bất kỳ, nhưng vẫn giữ nguyên thứ tự các ký tự còn lại.
Chuỗi thu được từ a và từ b giống hệt nhau và có độ dài lớn nhất được gọi là **xâu con chung dài nhất**, hay **LCS** (Longest Common Subsequence).

Lưu ý:

- Xâu con trong bài toán này là **xâu con theo nghĩa subsequence**, tức là các ký tự không cần đứng liền nhau trong chuỗi gốc.
- Khác với **substring** là chuỗi con liên tiếp.

Ví dụ:

- $a = abcde$, $b = ace$
Một chuỗi con chung dài nhất là ace , có độ dài 3.
- $a = abc$, $b = def$
Không có ký tự chung nên độ dài LCS bằng 0.

Yêu cầu

Cho hai chuỗi ký tự a và b .
Hãy tính **độ dài** của chuỗi con chung dài nhất của a và b .
Nói cách khác, hãy tìm số nguyên không âm L lớn nhất sao cho tồn tại một chuỗi s có độ dài L , s là chuỗi con của a và đồng thời cũng là chuỗi con của b .

Dữ liệu

- Dòng thứ nhất: chuỗi ký tự a .
- Dòng thứ hai: chuỗi ký tự b .

Giới hạn:

- $\sim 1 \leq |a|, |b| \leq 1000$.
- Các ký tự thuộc bộ ký tự thông dụng (ví dụ bảng chữ cái tiếng Anh, chữ số, ký tự ASCII), tùy theo hệ thống chấm.

Kết quả

- In ra một số nguyên duy nhất là **độ dài** của xâu con chung dài nhất của $\sim a$ và $\sim b$.

Ví dụ

Ví dụ 1

Input

```
abcde
ace
```

Output

```
3
```

Ví dụ 2

Input

```
abc
def
```

Output

```
0
```

Ví dụ 3

Input

AGGTAB
GXTXAYB

Output

4

Giải thích

Giải thích ví dụ 1

Ta có:

- $\sim a = abcde \sim$
- $\sim b = ace \sim$

Một chuỗi con chung dài nhất là $\sim ace \sim$, nên độ dài bằng $\sim 3 \sim$.

Giải thích ví dụ 2

Ta có:

- $\sim a = abc \sim$
- $\sim b = def \sim$

Không có ký tự nào xuất hiện trong cả hai chuỗi, nên không tồn tại chuỗi con chung khác rỗng. Vì vậy, độ dài $\sim \text{LCS} \sim$ bằng $\sim 0 \sim$.

Giải thích ví dụ 3

Ta có:

- $\sim a = AGGTAB \sim$
- $\sim b = GXTXAYB \sim$

Một chuỗi con chung dài nhất có thể là $\sim GTAB \sim$, có độ dài $\sim 4 \sim$.
Không có chuỗi con chung nào có độ dài lớn hơn, nên đáp án là $\sim 4 \sim$.

Gợi ý thuật toán Quy hoạch động

Ký hiệu:

- $n = |a|$ là độ dài xâu a .
- $m = |b|$ là độ dài xâu b .

Xây dựng bảng hai chiều f kích thước $(n + 1) \times (m + 1)$, trong đó:

- $f[i][j]$ là độ dài xâu con chung dài nhất của hai xâu con $a[1..i]$ và $b[1..j]$.

Khi đó, ta có công thức quy hoạch động:

- Nếu $a[i] = b[j]$ thì:

$$f[i][j] = f[i - 1][j - 1] + 1.$$

- Ngược lại:

$$f[i][j] = \max\bigl(f[i - 1][j], f[i][j - 1]\bigr).$$

Điều kiện biên:

- $f[0][j] = 0$ với mọi $0 \leq j \leq m$.
- $f[i][0] = 0$ với mọi $0 \leq i \leq n$.

Đáp án cuối cùng là:

$$\text{LCS_len} = f[n][m].$$

Độ phức tạp:

- Thời gian: $O(n \cdot m)$ với $n, m \leq 1000$ là phù hợp.
 - Bộ nhớ: $O(n \cdot m)$. Có thể tối ưu xuống $O(\min(n, m))$ nếu chỉ lưu hai dòng của bảng.
-